d) は，正確解。a),b),c) はそれぞれ，単精度，倍精度，4倍精度を用いて数値計算し求めた解である。

詳細はPhysica A (印刷中) の論文を参照されたい。(本文の図番号は本論文の図番号と合わせてつけた。)

自己相似性について

京大・理　畑　　政　義

自己相似性の概念そのものは，数学においては古くから知られた手法の一つであって，数々の反例を得るのに用いられてきた。例えば，いたるところ微分不可能な連続関数として知られているWeierstrassの関数 (図1) や高木の関数 (図2) などは，いわゆる“特異性の凝縮”と呼ばれる手法によって構成されているし，Peano曲線や正の二次元Lebesgue測度を持つJordan曲線なども，自己相似的構成法によって得られる。またCantorや，Koch曲線については，そのHausdorff次元が，正確に計算出来るのは，それらが空間的に，一様な自己相似性を持っているからと考えられる。

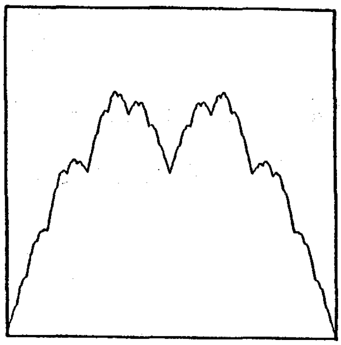

図1

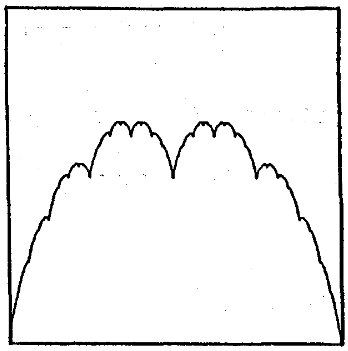

図2

さて，ここでは，その様な自己相似的な集合を数学的に取扱う一つの方法を提案したい。すなわち，完備距離空間E内の空でないcompact集合Xが，E内のm個の縮小写像$f_1, \cdots, f_m$に対する不変集合であるときは，次の集合方程式を満たすときに言う。

$$X = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \cdots \cup f_m(X).$$

この定義の意味は明らかであろう。すなわち，一つの集合Xが，m個の自分のminiaturesから成り立っているというのであるから，まさに自己相似性そのものを表わしているのである。

驚くべきことは，たったこれだけの式からいろいろな事実が導出できることである。R. F. Williams[3]は，表現は異なるが，本質的に，この集合方程式に対する解の存在と一意性を示

した。

例えば，

$$f_1(x)=\frac{x}{3},\quad f_2(x)=\frac{x+2}{3}$$

とおけば，それらの不変集合Xとして，Cantor集合を得るし，また

$$f_1(z)=\alpha\bar{z},\quad f_2(z)=(1-\alpha)\bar{z}+\alpha,\quad \alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$$

とおけば，de Rham [2] が示したように，Koch曲線が得られるという具合である。

de Rhamは，2つの縮小写像 f_1 と f_2 の間に，それぞれの唯一の不動点を p_1，p_2 として，$f_1(p_2)=f_2(p_1)$ という関係がある時に，不変集合Xの parameterization を研究している。

de Rhamの条件が満たされない場合でも，数々の興味ある不変集合が得られている。例えば，

$$f_1(z)=\alpha\bar{z},\quad f_2(z)=|\alpha|^2+(1-|\alpha|^2)\bar{z},$$

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$$

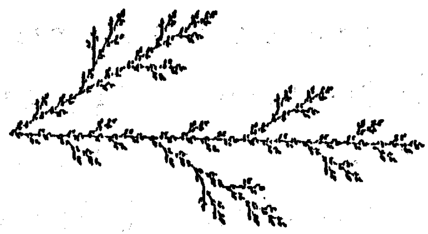

図3

とおけば，右図のような“樹木”が得られる。その他，不変集合の連結性，微分可能性，および，そのHausdorff次元などが [1] で詳しく論じられている。

参考文献

1) M. Hata, Invariant sets of contraction mappings, to appear in Japan J. of Appl. Math.

2) G. de Rham, Sur quelques courbes definies par des équations fonctionnelles, Rend. Sem. Mat. Torino, **16** (1957), 101–113.

3) R. F. Williams, Composition of contractions, Bol. Soc. Brasil. Mat., **2** (1971), 55–59.

一般化されたランダム・ウォークの経路ゆらぎと分岐

東北大・工　原　　啓　明

考える系のダイナミクスは確率過程として記述可能であり，その“力学系”の基礎方程式はプロセスに対する作用量 S が極値をとる条件式として得られるものとする。